**Nazwa przedmiotu:**

Przedmiot obieralny kontynuowany - Rachunek prawdopodobieństwa 2 / Rachunek prawdopodobieństwa\*

**Koordynator przedmiotu:**

prof. dr hab. Jacek Wesołowski - wersja dwusemestralna / dr Bartosz Kołodziejek - wersja jednosemestralna

**Status przedmiotu:**

Obowiązkowy

**Poziom kształcenia:**

Studia I stopnia

**Program:**

Matematyka

**Grupa przedmiotów:**

Wspólne

**Kod przedmiotu:**

1120-MA000-LSP-0356/

**Semestr nominalny:**

5 / rok ak. 2022/2023

**Liczba punktów ECTS:**

5

**Liczba godzin pracy studenta związanych z osiągnięciem efektów uczenia się:**

180 godzin: poświęconych na przyswojenie wiedzy teoretycznej: definicje i twierdzenia z dowodami oraz na rozwijanie umiejętności rozwiązywanie zadań

**Liczba punktów ECTS na zajęciach wymagających bezpośredniego udziału nauczycieli akademickich:**

4

**Język prowadzenia zajęć:**

polski

**Liczba punktów ECTS, którą student uzyskuje w ramach zajęć o charakterze praktycznym:**

2

**Formy zajęć i ich wymiar w semestrze:**

|  |  |
| --- | --- |
| Wykład:  | 30h |
| Ćwiczenia:  | 30h |
| Laboratorium:  | 0h |
| Projekt:  | 0h |
| Lekcje komputerowe:  | 0h |

**Wymagania wstępne:**

wersja dwusemestralna: Analiza matematyczna, teoria miary, algebra liniowa, analiza zespolona, elementy analizy funkcjonalnej, rachunek prawdopodobieństwa 1

wersja jednosemestralna: Analiza matematyczna 1 i 2, Algebra liniowa z geometrią, Matematyka dyskretna

**Limit liczby studentów:**

bez limitu

**Cel przedmiotu:**

Wersja dwusemestralna:
Zapoznanie studentów z drugą częścią zaawansowanego kursu rachunku prawdopodobieństwa

Wersja jednosemestralna:
Zapoznanie studentów z podstawami rachunku prawdopodobieństwa i jego zastosowań.

**Treści kształcenia:**

Wersja dwusemestralna:
1. Warunkowa wartość oczekiwana względem σ-ciała oraz względem zmiennej losowej.
2. Regularne rozkłady warunkowe, uogólniony wzór Bayesa.
3. Ciągi zmiennych losowych, miary probabilistyczne w przestrzeni ciągów, warunek zgodności Kołmogorowa.
4. Zbieżność według prawdopodobieństwa, zbieżność z prawdopodobieństwem jeden, warunki konieczne i dostateczne.
5. Zbieżność średniokwadratowa i według p-tego momentu, związki między różnymi typami zbieżności
6. Słabe prawa wielkich liczb, szeregi zmiennych losowych.
7. Nierówność Kołmogorowa, prawo zero-jedynkowe Kołmogorowa.
8. Mocne prawa wielkich liczb, twierdzenie Gliwienki-Cantelliego.
9. Słaba zbieżność miar probabilistycznych, jędrność, zbieżność według rozkładu.
10. Funkcje charakterystyczne, wzory na odwrócenie.
11. Twierdzenie o ciągłości, splot, kryteria dla funkcji charakterystycznych.
12. Centralne twierdzenia graniczne: dla tabilc trójkątnych, Moivre’a-Laplace’a, Lindeberga-Lévy’ego, Lapunowa, wielowymiarowa wersja ctg, metoda delta.
13. Momenty stopu, tożsamość Walda, martyngały.
14. Zagadnienia stopowania, zagadnienie ruiny gracza.
15. Jednostajna całkowalność, zbieżności martyngałów, nierówności martyngałowe.

Wersja jednosemestralna:
1. Powtórka z kombinatoryki i elementarnego rachunku zbiorów.
2. Przestrzeń zdarzeń elementarnych z przykładami jej opisu. Ogólna definicja prawdopodobieństwa. Zdarzenia losowe i ich opis.
3. Prawdopodobieństwo klasyczne i geometryczne. Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór Bayesa, niezależność zdarzeń, schemat Bernoulli'ego, lemat Borela-Cantelli'ego.
4. Zmienne losowe i metody opisu ich rozkładów. Dystrybuanta.
5. Miary dyskretne, absolutnie ciągłe i mieszane. Przegląd rozkładów dyskretnych i typu ciągłego.
6. Niezależność zmiennych losowych. Zmienne wielowymiarowe.
7. Wartość oczekiwana dla zmiennych prostych z przykładami. Wstęp do teorii miary oraz ogólna definicja wartości oczekiwanej.
8. Funkcje zmiennych losowych i ich rozkłady.
9. Kwantyle, momenty i wariancja zmiennej losowej. Nierówność Czebyszewa.
10. Parametry wektora losowego i wielowymiarowy rozkład normalny.
11. Definicja i podstawowe własności funkcji generujących momenty oraz funkcji charakterystycznej, związki z momentami.
12. Słaba zbieżność rozkładów.
13. Centralne twierdzenie graniczne dla niezależnych zmiennych losowych i jego zastosowania.
14. Słabe prawa wielkich liczb. Zbieżność prawie wszędzie. Mocne prawo wielkich liczb i jego konsekwencje dla statystyki.
15. Warunkowa wartość oczekiwana.

**Metody oceny:**

Wersja dwusemestralna:
Zaliczenie ćwiczeń odbywa się na podstawie 10-13 kartkówek i 2 kolokwiów (w proporcji ok. 1:4). Do zaliczenia ćwiczeń niezbędne jest zdobycie co najmniej 50% punktów. Zaliczenie przedmiotu odbywa się na podstawie egzaminu pisemnego składającego się z dwóch części (zadaniowej i teoretycznej, w proporcjach 3:2). Do zaliczenia przedmiotu niezbędne jest zdobycie co najmniej 50% punktów z egzaminu bądź łącznie z egzaminu i ćwiczeń, przy czym stosunek punktów za egzamin i ćwiczenia to 3:2.

Wersja jednosemestralna:
Ćwiczenia: pięć kartkówek w semestrze po 4 pkt, dwa kolokwia (po 7 i po 14 ćwiczeniach) po 40 pkt, dodatkowe punkty za aktywność na zajęciach.
Egzamin: pisemny 100 pkt, w tym 50 pkt za część zadaniową oraz 50 pkt za część teoretyczną. Każdą z części
Z części zadaniowej można być zwolnionym jeśli z ćwiczeń zdobędzie się co najmniej 75 punktów. Wtedy za wynik z części zadaniowej uznaje się wynik z ćwiczeń podzielony przez 2.
Jeśli student dostał mniej niż 75 punktów z ćwiczeń, to do jego wyniku z części zadaniowej dodawana (o ile jest dodatnia) jest część całkowita z ilorazu (X-40)/4, gdzie X to liczba punktów uzyskanych na ćwiczeniach.
Żeby zaliczyć przedmiot należy przepołowić każdą z części egzaminu. Do zaliczenia przedmiotu liczy się wtedy jedynie suma punktów z części zadaniowej i teoretycznej egzaminu:
od 51pkt – 3,0
od 61pkt – 3,5
od 71pkt – 4,0
od 81pkt – 4,5
od 91pkt – 5,0

**Egzamin:**

tak

**Literatura:**

Wersja dwusemestralna:
1. J. Jakubowski, R. Sztencel Wstęp do teorii prawdopodobieństwa, SRIPT Warszawa, 2001
2. P. Billingsley Prawdopodobieństwo i miara, PWN Warszawa, 2009
3. W. Feller Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, t. I i II, PWN Warszawa, 2012.

Wersja jednosemestralna:
1. J. S. Rosenthal, A first look at rigorous probability theory, Second edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2006
2. J.Jakubowski, R.Sztencel, Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego, SCRIPT 2002.
3. J.Misiewicz, Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa z zadaniami, SCRIPT 2005.
4. R. Bartoszyński, Magdalena Niewiadomska-Bugaj, Probability and Statistical Inference, Wiley-Interscience 2008.

**Witryna www przedmiotu:**

brak

**Uwagi:**

.

## Charakterystyki przedmiotowe

### Profil ogólnoakademicki - wiedza

**Charakterystyka RP\_W01:**

Zna elementarne konstrukcje rachunku prawdopodobieństwa i podstawowe rozkłady występujące w probabilistyce.

Weryfikacja:

Egzamin, kartkówki, rozwiązywanie zadań przy tablicy

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_W22, M1\_W06

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP\_W02:**

Zna pojęcie zmiennej losowej, wektora losowego, wartości oczekiwanej, wariancji i wyższych momentów zmiennych losowych.

Weryfikacja:

Egzamin, kartkówki, rozwiązywanie zadań przy tablicy

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_W06, M1\_W22

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP\_W03:**

Zna pojęcie funkcji charakterystycznej i związane z tym pojęciem techniki probabilistyczne

Weryfikacja:

Egzamin, kartkówki, rozwiązywanie zadań przy tablicy

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_W23

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP\_W04:**

Zna nierówność Czebyszewa, centralne twierdzenie graniczne i podstawowe prawa wielkich liczb

Weryfikacja:

Egzamin, kartkówki, rozwiązywanie zadań przy tablicy

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_W05, M1\_W23

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_W01:**

Zna abstrakcyjne pojęcie warunkowej wartości oczekiwanej i rozkładu warunkowego oraz ich własności

Weryfikacja:

Egzamin – część teoretyczna, kartkówki na ćwiczeniach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_W22

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_W02:**

Zna pojęcie funkcji charakterystycznej, własności, twierdzenia o odwróceniu i twierdzenie o ciągłości

Weryfikacja:

Egzamin – część teoretyczna, kartkówki na ćwiczeniach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_W10, M1\_W22, M1\_W23

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_W03:**

Zna pojęcie ciągu zmiennych losowych, różne pojęcia zbieżności: według prawdopodobieństw, według p-tego momentu, prawie na pewno, według rozkładu

Weryfikacja:

Egzamin – część teoretyczna, kartkówki na ćwiczeniach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_W05, M1\_W06

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_W04:**

Zna zagadnienia asymptotyczne probabilistyki: prawa wielkich liczb i centralne twierdzenia graniczne

Weryfikacja:

Egzamin – część teoretyczna, kartkówki na ćwiczeniach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_W22, M1\_W23, M1\_W25

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_W05:**

Zna podstawy teorii martyngałów z czasem dyskretnym

Weryfikacja:

Egzamin – część teoretyczna, kartkówki na ćwiczeniach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_W25

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

### Profil ogólnoakademicki - umiejętności

**Charakterystyka RP\_U01:**

Umie obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń w podstawowych modelach probabilistycznych.

Weryfikacja:

Egzamin, kartkówki, rozwiązywanie zadań przy tablicy

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_U20

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP\_U02:**

Umie znajdować wartość oczekiwaną, wariancję i inne podstawowe parametry rozkładów jedno i wielowymiarowych.

Weryfikacja:

Egzamin, kartkówki, rozwiązywanie zadań przy tablicy

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_U20

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP\_U03:**

Potrafi stosować nierówność Czebyszewa, centralne twierdzenie graniczne i prawa wielkich liczb w konkretnych problemach aplikacyjnych.

Weryfikacja:

Egzamin, kartkówki, rozwiązywanie zadań przy tablicy

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_U06, M1\_U21

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_U01:**

Potrafi znajdować rozkłady warunkowe i warunkowe wartości oczekiwane, w tym umie posługiwać się uogólnionym wzorem Bayesa

Weryfikacja:

Egzamin – część zadaniowa, kolokwia na ćwiczeniach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_U20

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_U02:**

Potrafi znajdować funkcje charakterystyczne różnych rozkładów prawdopodobieństwa, a także posługiwać się wzorami na odwrócenie oraz twierdzeniem o ciągłości w badaniu zbieżności według rozkładu

Weryfikacja:

Egzamin – część zadaniowa, kolokwia na ćwiczeniach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_U20

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_U03:**

Umie stosować słabe i mocne prawa wielkich liczb oraz interpretować otrzymywane wyniki. Umie stosować centrale twierdzenie graniczne do różnych zagadnień aplikacyjnych, w tym do metody Monte Carlo

Weryfikacja:

Egzamin – część zadaniowa, kolokwia na ćwiczeniach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_U21

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_U04:**

Umie posługiwać się podstawowymi metodami martyngałowymi, w tym tożsamością Walda. Umie badać własności martyngałowe ciągów zmiennych losowych

Weryfikacja:

Egzamin – część zadaniowa, kolokwia na ćwiczeniach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_U21, M1\_U23

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

### Profil ogólnoakademicki - kompetencje społeczne

**Charakterystyka RP\_K01:**

Rozumie potrzebę stałego podnoszenia kwalifikacji

Weryfikacja:

Egzamin, kartkówki, rozwiązywanie zadań przy tablicy

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_K01

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP\_K02:**

Umie prawidłowo określić priorytety służące do realizacji określonego zadania

Weryfikacja:

Egzamin, kartkówki, rozwiązywanie zadań przy tablicy

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_K03, M1\_K05

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_K01:**

Rozumie potrzebę stałego podnoszenia kwalifikacji

Weryfikacja:

Kolokwia

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_K01, M1\_K05

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka RP2\_K02:**

Umie prawidłowo określić priorytety służące do realizacji określonego zadania

Weryfikacja:

Kolokwia

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** M1\_K03

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**